Digitale verktøy

I Matematikksenteret sies det blant annet:
Mange oppgaver vil kreve en kombinasjon av matematikk og tekst, og vi anbefaler derfor **tekstbehandler til å lage besvarelsen**. Da kan elevene **lime inn** utklipp fra regneark, graftegner og/eller CAS (som i **GeoGebra**), og det er lett å lage en oversiktlig besvarelse i ett dokument. Vi anbefaler å bruke utklippsverktøy for å ta bilde av relevante utsnitt og deretter lime dem inn i en tekstbehandler.

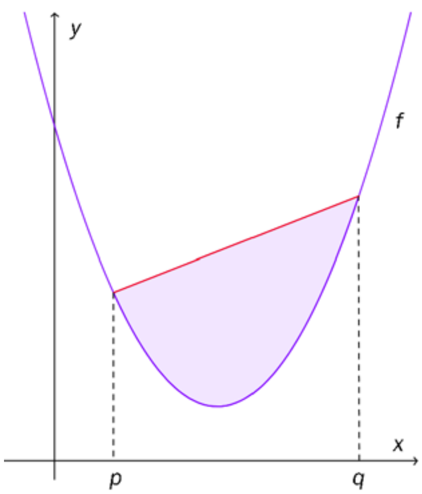
I **Maple** er alt det som er nevnt over fullstendig unødvendig. Maple håndterer matematikkberegninger, grafikk, vanlig tekst og matematisk tekst (formler etc som i en lærebok) i **ett og samme dokument**.

Eksempel

En funksjon f er gitt ved

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $D_f = \boldsymbol{R}$

Et område er avgrenset av grafen til f og en rett linje. Skjæringspunktene mellom grafen til f og den rette linja har x-koordinater p og q. Se skissen nedenfor.



Bruk CAS til å vise at arealet som er begrenset av grafen til f og den rette linjen bare er avhengig av differansen $p - q$ og a (eller differansen $q - p$ og a).

GeoGebra

Oppgave 6

Jeg bestemmer først likningen til den rette linja gjennom punktene $(p, f(p))$ og $(q, f(q))$ på grafen til *f*. Denne linja kaller jeg *g(x)*.

Deretter finner jeg det bestemte integralet mellom *g(x)* og *f(x)* mellom $x = p$ og $x = q$.

1	f(x):=a*x^2+b*x+c $\rightarrow\ f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$
2	Linje[(p,f(p)),(q,f(q))] $\rightarrow\ y = x\ (a\,p + a\,q + b) - a\,p\,q + c$
3	g(x):=HøyreSide[$2] $\rightarrow\ g(x) := -a\,p\,q + a\,p\,x + a\,q\,x + b\,x + c$
4	IntegralMellom[f,g,p,q] $\rightarrow\ \frac{1}{6}\,a\,p^3 - \frac{1}{2}\,a\,p^2\,q + \frac{1}{2}\,a\,p\,q^2 - \frac{1}{6}\,a\,q^3$
5	1 / 6 a p³ - 1 / 2 a p² q + 1 / 2 a p q² - 1 / 6 a q³ Faktoriser: $(p - q)^3 \cdot \frac{a}{6}$

Arealet mellom grafene avhenger kun av differansen $p - q$ og a.

Maple

> $f := x \to a \cdot x^2 + b \cdot x + c$: # *definerer f som en funksjon*

> $RettLinje([q, f(q)], [p, f(p)])$ # *rett linje i vgs-pakken*

$$y = a\,q^2 + b\,q + c + \frac{\left(a\,p^2 - a\,q^2 + b\,p - b\,q\right)\,(x - q)}{p - q}$$

> $simplify(\%)$

$$y = ((p + q)\,x - p\,q)\,a + b\,x + c$$

> $g := unapply(rhs(\%), x)$ #*gjør om høyre side til en funksjon g*

$$g := x \mapsto ((p + q) \cdot x - p \cdot q) \cdot a + b \cdot x + c$$

> $A := Int(g(x) - f(x), x = p\,..q)$ # *integrasjon*

$$A := \int_p^q \left(((p + q)\,x - p\,q)\,a - a\,x^2 \right) \mathrm{d}x$$

> $A = simplify(value(A))$ #*resultatet*

$$\int_p^q \left(((p + q)\,x - p\,q)\,a - a\,x^2 \right) \mathrm{d}x = -\frac{(p - q)^3\,a}{6}$$

"Papir og blyant" for å finne den rette linjen

> $y - f(q) = \frac{f(q) - f(p)}{q - p} \cdot (x - q)$ # *kjent formel* `: $y\text{-}y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right)$

$$-a\,q^2 - b\,q - c + y = \frac{\left(-a\,p^2 + a\,q^2 - b\,p + b\,q\right)\,(x - q)}{q - p}$$

> $\% + \left(a\,q^2 + b\,q + c\right)$

$$y = \frac{\left(-a\,p^2 + a\,q^2 - b\,p + b\,q\right)\,(x - q)}{q - p} + a\,q^2 + b\,q + c$$

> $simplify(\%)$ #*forenkler*

$$y = ((p + q)\,x - p\,q)\,a + b\,x + c$$

Oppgave 1

Oppgaven er hentet fra forslag til ny eksamensordning for REA3026 Matematikk S1 (2012, s. 9).
Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = a\,x^3 - b\,x - 2$

Grafen har et toppunkt i $(2, f(2))$ og en tangent med stigningstall 2 i punktet $(1, f(1))$.
Bestem de eksakte verdiene for a og b.

Vi definerer funksjonen f.

> $f := x \rightarrow a \cdot x^3 - b \cdot x - 2 :$

Stigningstallet 2 i punktet $(1, f(1))$ er gitt ved

> $lign2 := f'(1) = 2 : \%$

$$3\,a - b = 2$$

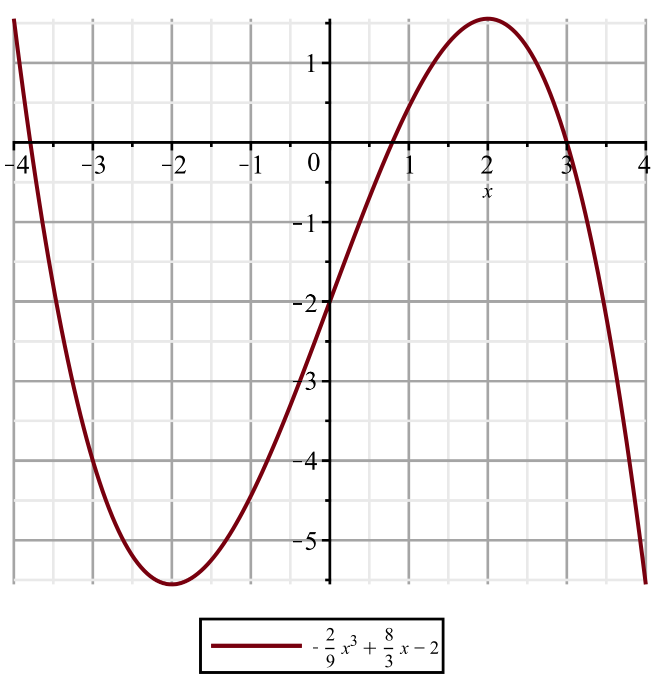
Vi tilordner verdiene til a og b ved

> a, b

$$-\frac{2}{9}, -\frac{8}{3}$$

Grafen til f blir da

> $pltf := plot(f(x), x = -4..4, gridlines, legend = typeset(f(x)))$



> $display(pltf, pltT, pltP)$

I toppunktet er den deriverte lik 0.

> $lign1 := f'(2) = 0 : \%$

$$12\,a - b = 0$$

Vi har to ligninger og to ukjente a og b, som gir

> $Løsning := solve(\{lign1, lign2\}, \{a, b\}) : \%$

$$\left\{a = -\frac{2}{9}, b = -\frac{8}{3}\right\}$$

> $assign(Løsning) :$

Da får vi

> $'f(x)' = f(x)$

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{3}x - 2$$

Ligningen for tangenten i punktet $(1, f(1))$ blir

> $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$y - \frac{4}{9} = 2\,x - 2$$

> $isolate(\%, y)$

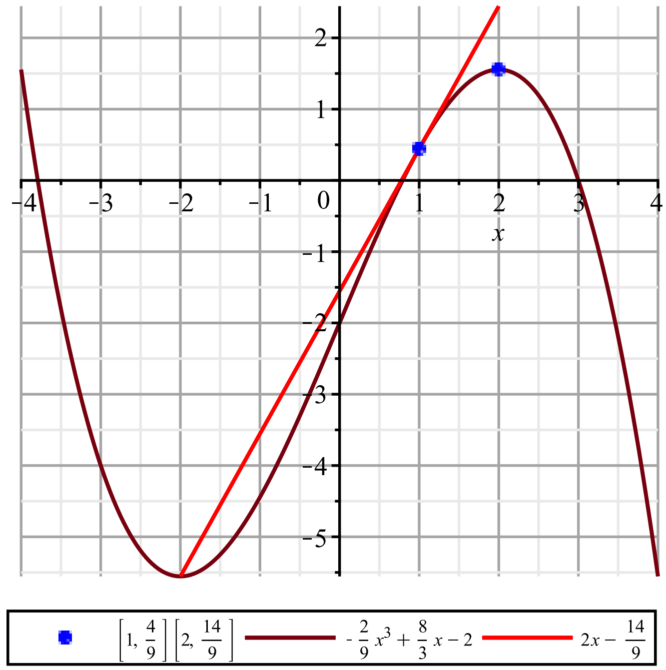
$$y = 2\,x - \frac{14}{9}$$

> $tangent := rhs(\%) :$

Vi plotter tangenten, toppunktet og tangeringspunktet.

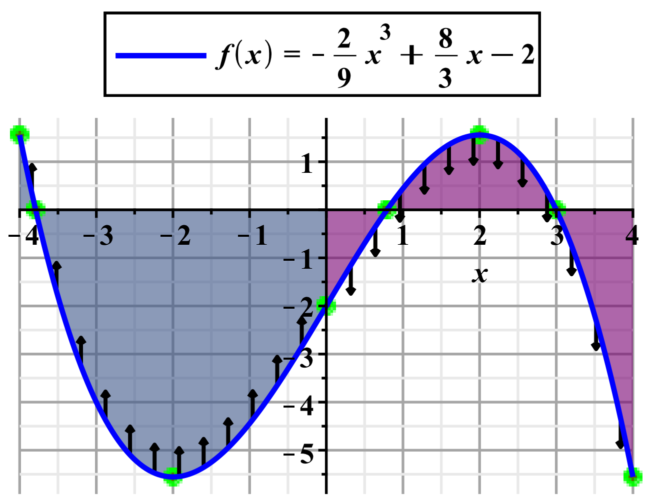
> $pltT := plot(tangent, x = -2..2, color = red, legend = typeset(tangent)) :$

> $pltP := pointplot(\{[1, f(1)], [2, f(2)]\}, color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 14, legend = typeset([1, f(1)], [2, f(2)])) :$



Med kommandoen FunksjonsDrøfting i vgs-pakken får vi

> *FunksjonsDrøfting*($f, x=-4..4, p$)



Nullpunkter: $[[-3.791, 0.], [0.7913, -0.], [3.000, 0.]]$

***Kritiske punkter*:** $[[-2.000, -5.556], [2.000, 1.556]]$

***Vendepunkter*:** $[[0., -2.]]$

***Randpunkter*:** $[[-4., 1.556], [4., -5.556]]$

Med GeoGebra

Løsning med teksten skrevet inn i CAS

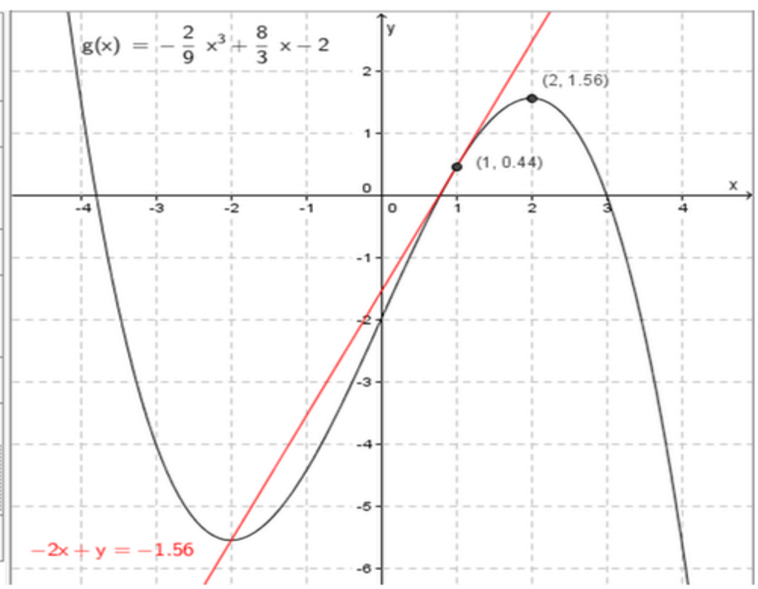
1	f(x):=a*x^3-b*x-2 → $f(x) := a\ x^3 - b\ x - 2$
2	I toppunktet er den deriverte lik 0
3	f'(2)=0 → $12\ a - b = 0$
4	Stigningstallet til tangenten er lik den deriverte i punktet
5	f'(1)=2 → $3\ a - b = 2$
6	Nå har jeg to likninger med to ukjente som jeg kan løse
7	{$3, $5} Løs: $\left\{\left\{a = -\frac{2}{9}, b = -\frac{8}{3}\right\}\right\}$

Løsning med tekstsvar

1	f(x):=a*x^3-b*x-2 → $f(x) := a\ x^3 - b\ x - 2$
2	f'(2)=0 → $12\ a - b = 0$
3	f'(1)=2 → $3\ a - b = 2$
4	{$2, $3} Løs: $\left\{\left\{a = -\frac{2}{9}, b = -\frac{8}{3}\right\}\right\}$

Jeg finner den deriverte av funksjonen f. Når x=2 har funksjonen et toppunkt, det vil si at den deriverte er 0. Det gir meg første ligning (rad 3). Når x=1 har funksjonen en tangent med stigningstall 2, det vil si at den deriverte er 2. Det gir meg andre ligning (rad 4). Jeg bruker de to likningene for å finne a og b.

1	f(x):=a*x^3-b*x-2 → $f(x) := a\ x^3 - b\ x - 2$
2	I toppunktet er den deriverte lik 0
3	f'(2)=0 → $12\ a - b = 0$
4	Stigningstallet til tangenten er lik den deriverte i punktet
5	f'(1)=2 → $3\ a - b = 2$
6	Nå har jeg to likninger med to ukjente som jeg kan løse
7	{$3, $5} Løs: $\left\{\left\{a = -\frac{2}{9}, b = -\frac{8}{3}\right\}\right\}$
8	



Oppgave 2

Oppgaven er hentet fra forslag til ny eksamensordning for MAT1013 Matematikk 1T (2012, s. 10). Oppgaven må løses med CAS eller graftegner for å gi full uttelling.

Funksjonen f er gitt ved

$f(x) = 0.5\,x^3 - 3.25\,x^2 + 6\,x - 2.25$, $x \in$ [-1,4].

Grafen til f har tre tangenter som går gjennom origo.

1. Tegn grafen til f i et koordinatsystem, og skisser de tre tangentene.
2. Skriv opp likningen for tangent til grafen til f som går gjennom punktet $(x_1, f(x_1))$.

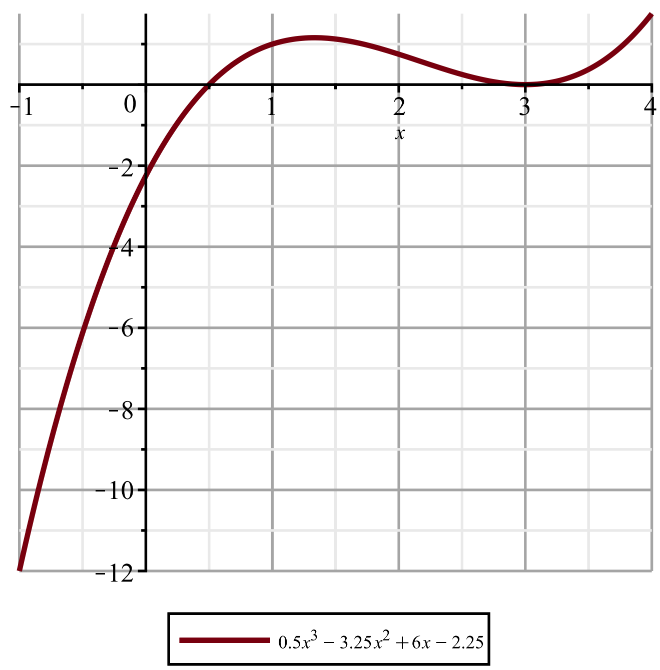
Bruk denne likningen til å finne de tre punktene der grafen til f har en tangent som går gjennom origo.

Vi definerer funksjonen f.

> $f := x \rightarrow 0.5\,x^3 - 3.25\,x^2 + 6\,x - 2.25$:

Grafen til f

> $pltf := plot(f(x), x = -1\,..4, gridlines, legend = typeset(f(x)), thickness = 2)$



Tangenten gjennom punktet $(x_1, f(x_1))$ er gitt ved $y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$. Erstatter x_1 med a for regneteknisk skyld (med $x = 0$, blir $x_1 = 0_1$).

> $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$: %

$$y - 0.5\,a^3 + 3.25\,a^2 - 6\,a + 2.25 = \left(1.5\,a^2 - 6.50\,a + 6\right)(x - a)$$

> $T := isolate(\%, y)$: %

$$y = \left(1.5\,a^2 - 6.50\,a + 6\right)(x - a) + 0.5\,a^3 - 3.25\,a^2 + 6\,a - 2.25$$

Setter inn $x = 0$ og $y = 0$ i T.

> $lign := subs(x = 0, y = 0, T)$: %

$$0 = -\left(1.5\,a^2 - 6.50\,a + 6\right)a + 0.5\,a^3 - 3.25\,a^2 + 6\,a - 2.25$$

Løser lign med hensyn på a og får tre løsninger:

>

De tre tangentene T1, T2, T3 blir da

>

> $x_1, x_2, x_3 := solve(lign, a)$

$$x_1, x_2, x_3 := 1., -0.7500000000, 3.$$

> $T1, T2, T3 := subs(a = x_1, T), subs(a = x_2, T), subs(a = x_3, T)$:

> $T1$

$$y = 1.00\, x$$

> $T2$

$$y = 11.71875000\, x$$

> $T3$

$$y = 0.$$

Plotter høyrsidene av de tre tangentene.

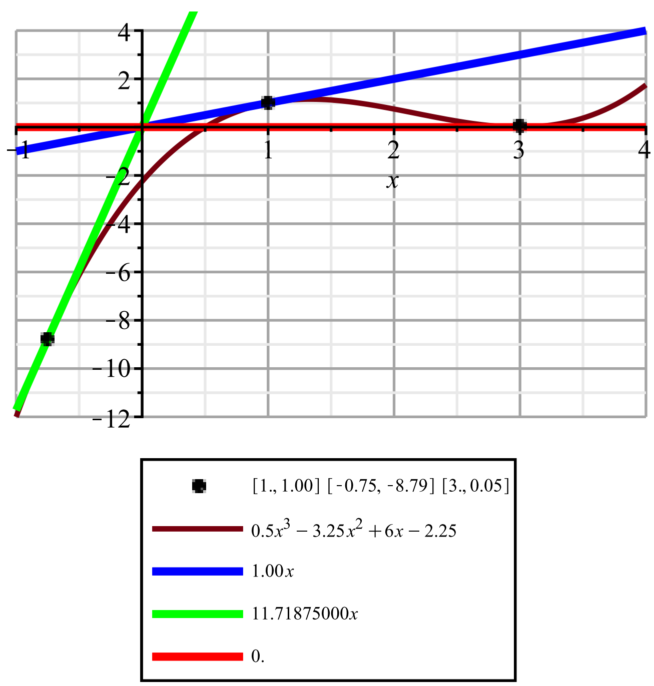
> $pltT := plot([rhs(T1), rhs(T2), rhs(T3)], x = -1..4, gridlines, view = [-1..4, -12..4], color = [blue, green, red], thickness = 3, legend = [typeset(rhs(T1)), typeset(rhs(T2)), typeset(rhs(T3))])$:

Plotter de tre punktene på grafen til $f(x)$.

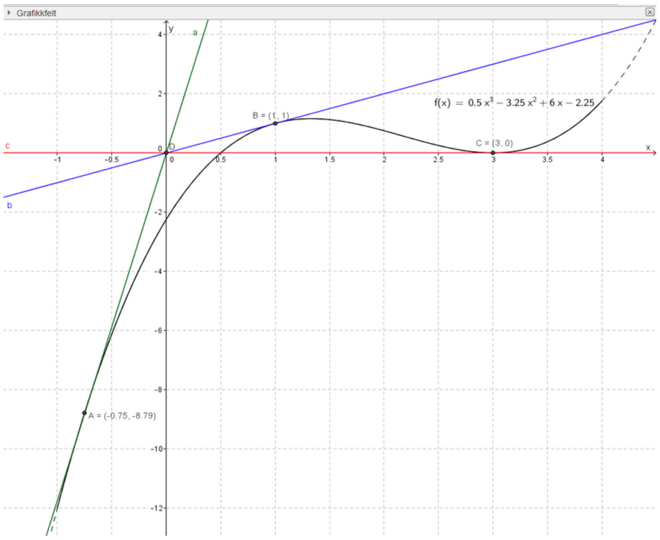
> $pltP := pointplot([[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], [x_3, f(x_3)]], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 14, legend = typeset([x_1, f(x_1)], [evalf(x_2, 2), f(x_2)], [x_3, f(x_3)]))$:

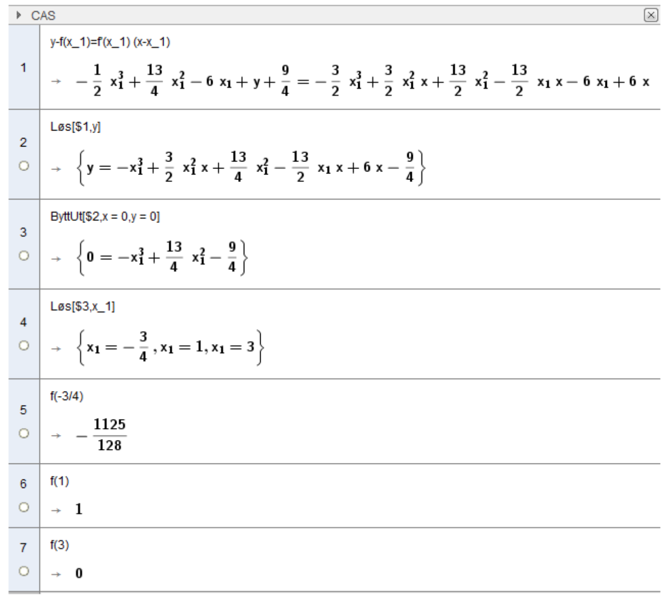
Figuren viser alle tre plottene

> $display(pltf, pltT, pltP)$



Med GeoGebra





Grafen til f og de tre tangentene a, b og c gjennom origo er vist i figuren over.
En tangent til f gjennom punktet $(x_1, f(x_1))$ har ligningen

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Ved hjelp av CAS, finner jeg ligningen i rad 2 i CAS-vinduet over. For å finne de tre tangentene gjennom origo, setter jeg
$x = 0$ og $y = 0$ i ligningen og løser denne med hensyn på x_1 (rad 4). Da får jeg x-verdiene til punktene tangentene går gjennom på grafen til f. Jeg setter inn i $f(x)$ og finner punktene: A=(-3/4,-1125/128) ≈ (-0.75, -8.79), B = (1,1), C = (3,0)

Oppgave 3 (hentet fra Matematikksenteret)
Oppgaven er hentet fra eksamen i REA3028 Matematikk S2, våren 2012 (s. 14).

PISA er en internasjonal undersøkelse som blir gjennomført hvert tredje år blant skoleelever i en rekke land. Ved undersøkelsen i 2009 var det med 4700 elever fra Norge. I naturfag scoret de norske elevene i gjennomsnitt 500 poeng. Det var nøyaktig likt det internasjonale gjennomsnittet. Standardavviket for norske elever var 90 poeng.

Vi trekker tilfeldig ut en elev blant de norske deltakerne. I oppgavene a) og b) kan du regne med at poengsummen til eleven er normalfordelt med forventningsverdi 500 poeng og standardavvik 90 poeng.

a) Bestem sannsynligheten for at eleven scoret minst 650 poeng.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven scoret mellom 475 og 535 poeng.

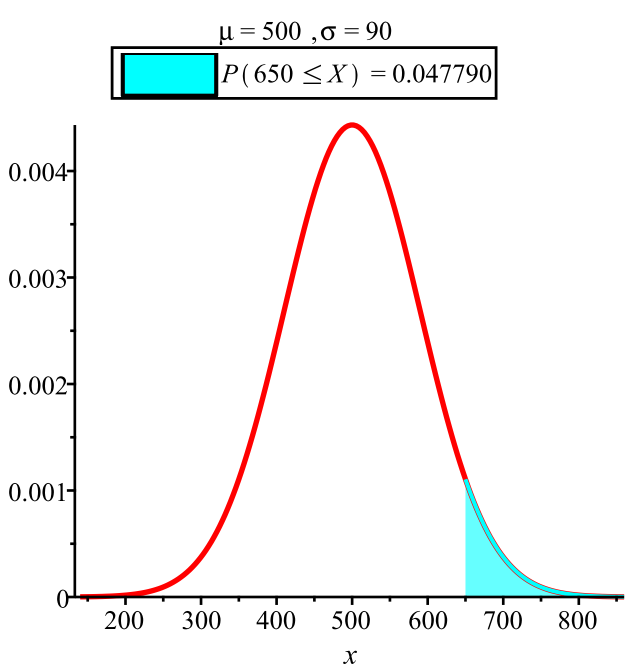
I virkeligheten kjenner vi ikke forventet poengsum for norske elever. Vi vet bare at gjennomsnittet var 500 poeng for de 4700 elevene som var med i undersøkelsen.

c) Er det grunnlag for å si at norske elever var bedre enn elever fra land som scoret 495 poeng? Velg signifikansnivå selv.

Maple løsning
NormalProbPlot baserer seg på flere Maple-kommandoer og finnes i min calc-pakke

a)

> $NormalProbPlot(500, 90, 650, right, p)$

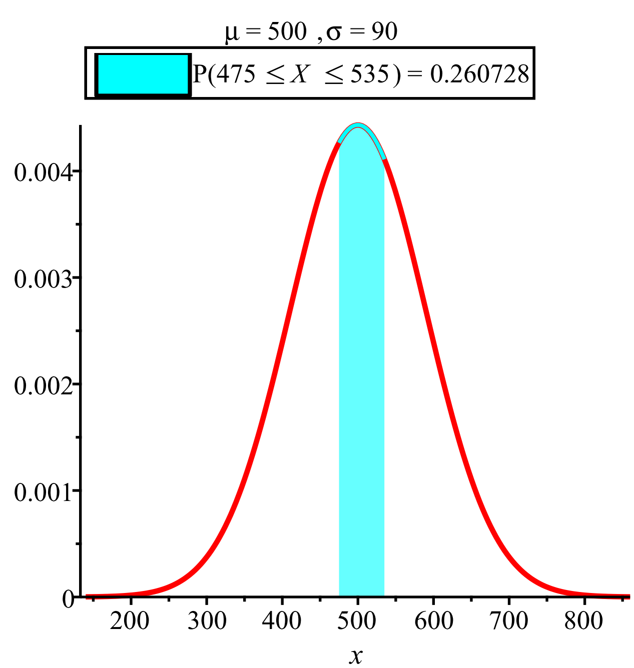


> p

$$P(650 \leq X) = 0.047790$$

b)

> $NormalProbPlot(500, 90, 475, 535, p)$



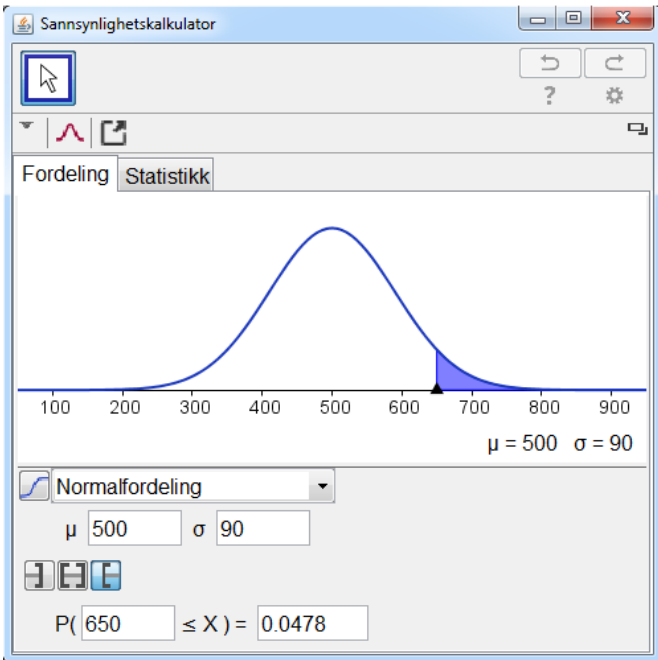
> p

$$P(475 \leq X \leq 535) = 0.260728$$

Alt dette stemmer overens med GeoGebra løsningen kopiert inn under.

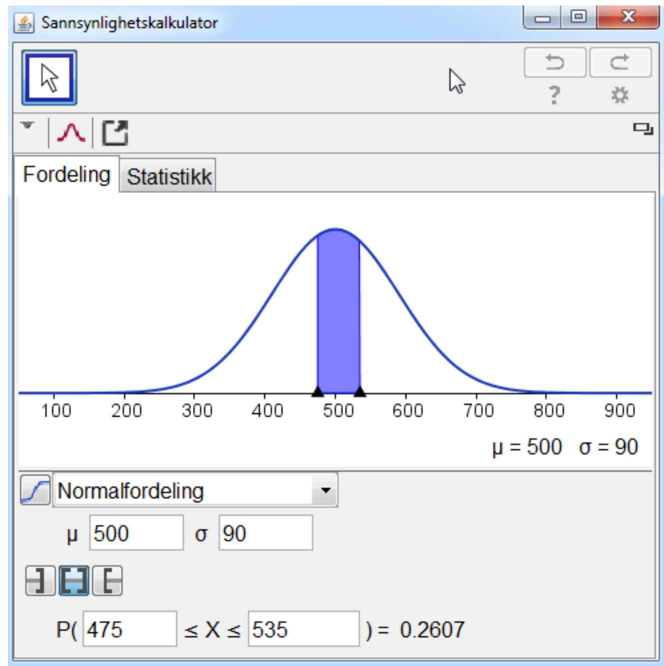
GeoGebra

a) Jeg skriver inn i sannsynlighetskalkulatoren og får sannsynligheten for at eleven scoret minst 650 poeng:
$P(X \geq 650) = 0.0478 \approx 4.8$ %



Sannsynligheten for at en elev fikk minst 650 poeng er 4,8 %.

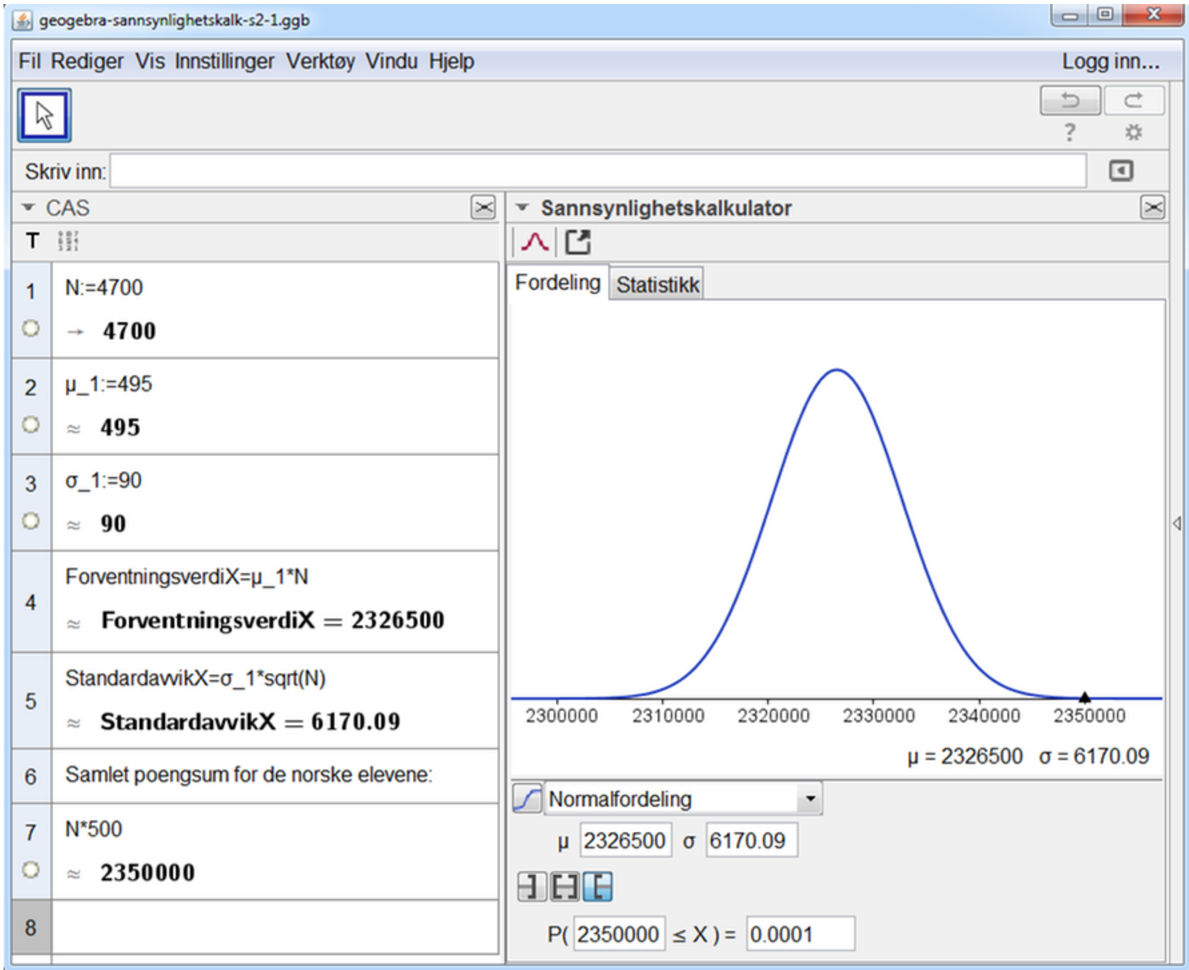
b) Jeg skriver inn i sannsynlighetskalkulatoren og får sannsynligheten for at eleven scoret mellom 475 og 535 poeng:
$P(475 \leq X \leq 535) = 0.2607 \approx 26.1$ %



Sannsynligheten for at en elev fikk mellom 475 og 535 poeng er 26.1 %.

c) Jeg setter opp en nullhypotese, H0: μ=495 og en alternativ hypotese H1: μ>495. Jeg lar fortsatt standardavviket være 90 og velger 5 % som signifikansnivå. Jeg antar at nullhypotesen er sann.

Jeg må finne sannsynligheten for at det var tilfeldig at 4700 norske elever scoret (i gjennomsnitt) 500 poeng hver.



Det er 0.0001 ≈ 0.01 % sannsynlighet for at resultatet til de norske elevene var tilfeldig, mye mindre enn 5 % (valgt signifikansnivå). Jeg kan derfor forkaste nullhypotesen og si at de norske elevene var bedre enn elever fra land som scoret 495 poeng.

Maple løsning

Nå bruker jeg de samme verdiene som vist i venstre kolonne på figuren over

> $N, \mathrm{mu}, \mathrm{sigma} := 4700, 495, 90 :$

> $\mathit{Forventningsverdi} := \mathrm{mu} \cdot N$

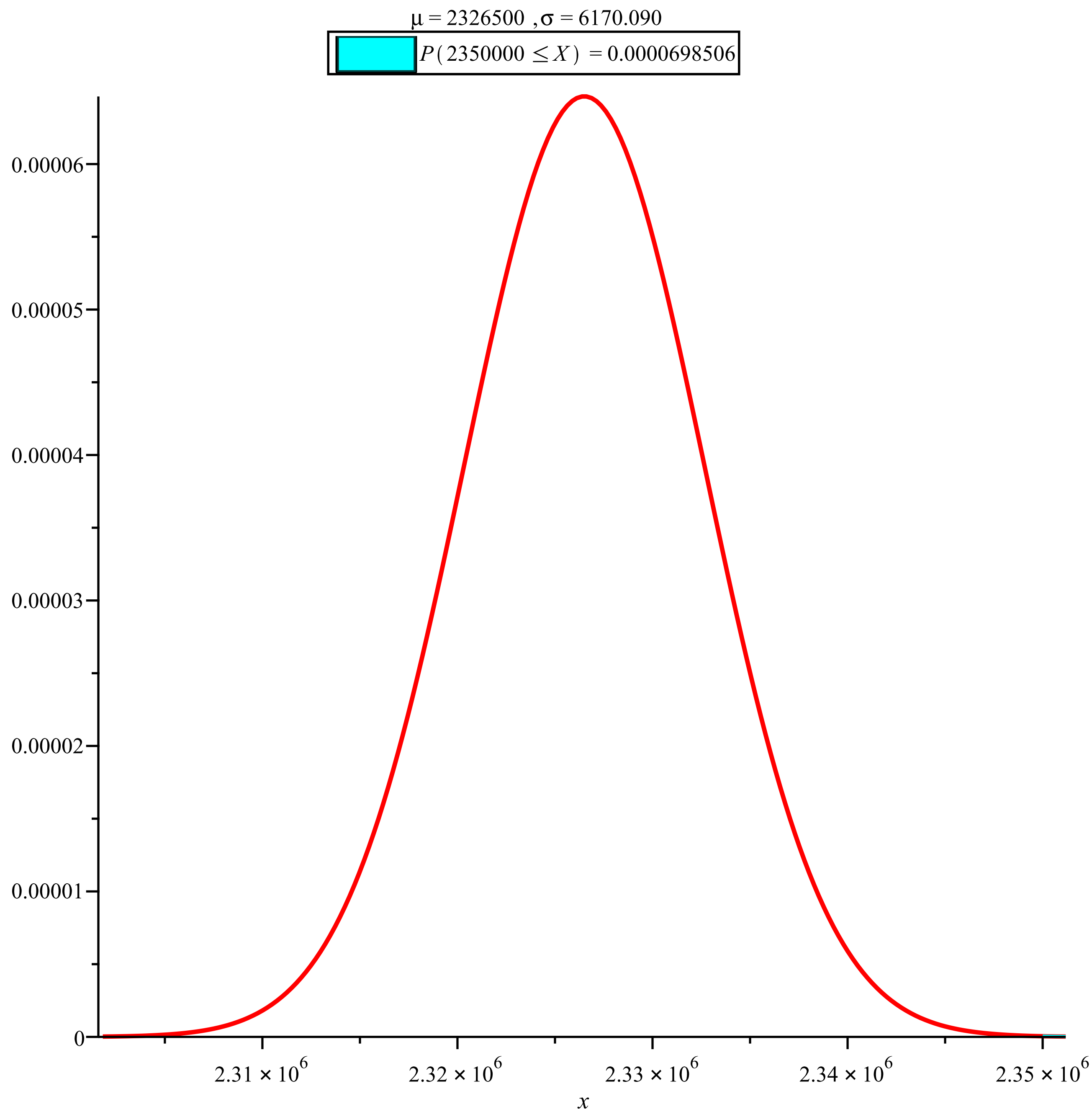
$$\mathit{Forventningsverdi} := 2326500$$

> $\mathit{StandardavvikX} := \mathit{evalf}\left(\mathrm{sigma} \cdot \sqrt{N}, 7\right)$

$$\mathit{StandardavvikX} := 6170.090$$

Sannsynlighets-plottet under gir samme resultat som i høyre kolonne på figuren over.

> $\mathit{NormalProbPlot}(\mathit{Forventningsverdi}, \mathit{StandardavvikX}, 2350000, \mathit{right}, p)$



> p

$$P(2350000 \leq X) = 0.0000698506$$

Følgende test i Maple verifiserer utsagnet om at nullhypotesen nevnt over forkastes.

> $data := [seq(500, i = 1..4700)]:$

Da blir resultatet

> $OneSampleZTest(data, 495, 90, confidence = 0.95, alternative = 'uppertail', summarize = embed)$

$hypothesis = false, confidenceinterval = 497.840660956351..\infty, distribution = Normal(0, 1), pvalue = 0.0000698505109231196, statistic = 3.80869699871721$

Null Hypothesis:	Sample drawn from population with mean less than 495 and known standard deviation 90
Alternative Hypothesis:	Sample drawn from population with mean greater than 495 and known standard deviation 90

Sample Size	Sample Mean	Distribution	Computed Statistic	Computed p-value	Confidence Interval
4700.	500.	*Normal*(0, 1)	3.80870	0.000069850\ 5	497.841 ..Float(∞)

Result:	**Rejected**: This statistical test provides evidence that the null hypothesis is false.

p-verdien i denne testen er den samme som kom fram i *NormalProbPlot* vist over.

Oppgave 4

Oppgaven er hentet fra forslag til ny eksamensordning i MAT1015 Matematikk 2P (2015, s. 9). Det er krav om at elevene skal bruke regneark.

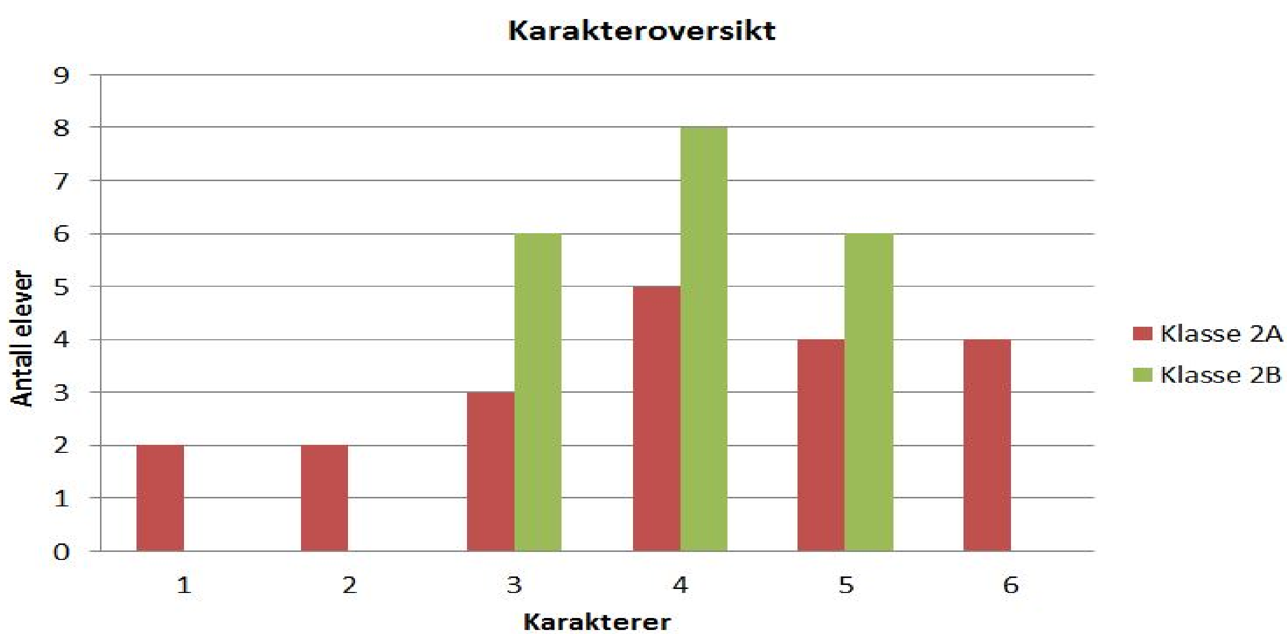
Våren 2012 var klasse 2A og klasse 2B på en skole oppe til eksamen i matematikk. Tabellen nedenfor viser hvordan karakterene fordelte seg i de to klassene.

Karakterer	Klasse 2A (Frekvens)	Klasse 2B (Frekvens)
1	2	0
2	2	0
3	3	6
4	5	8
5	4	6
6	4	0
Sum	20	20

a) Lag en grafisk framstilling som viser karakterfordelingen i de to klassene.
b) Regn ut gjennomsnittskarakter, mediankarakter og standardavvik for karakterene i hver av de to klassene. Hva forteller svarene om resultatene i de to klassene?

Excel

a)



Diagrammet viser karakterfordelingen for klasse A og klasse B

b)

	A	B	C	D	E	F
1	Klasse 2A	Klasse 2B				
2	1	3				
3	1	3				
4	2	3				
5	2	3				
6	3	3			**Klasse 2A**	**Klasse 2B**
7	3	3		**Gjennomsnitt**	=GJENNOMSNITT(A2:A21)	=GJENNOMSNITT(B2:B21)
8	3	4		**Median**	=MEDIAN(A2:A21)	=MEDIAN(B2:B21)
9	4	4		**Standardavvik**	=STDAV.P(A2:A21)	=STDAV.P(B2:B21)
10	4	4				
11	4	4				
12	4	4				
13	4	4				
14	5	4				
15	5	4				
16	5	5				
17	5	5				
18	6	5				
19	6	5				
20	6	5				
21	6	5				

	A	B	C	D	E	F
1	Klasse 2A	Klasse 2B				
2	1	3				
3	1	3				
4	2	3				
5	2	3				
6	3	3			**Klasse 2A**	**Klasse 2B**
7	3	3		**Gjennomsnitt**	3,95	4
8	3	4		**Median**	4	4
9	4	4		**Standardavvik**	1,564448785	0,774596669
10	4	4				
11	4	4				
12	4	4				
13	4	4				
14	5	4				
15	5	4				
16	5	5				
17	5	5				
18	6	5				
19	6	5				
20	6	5				
21	6	5				

Excelarket viser at gjennomsnittskarakteren for klasse A er 3,95 og 4 for klasse B. Medianen er 4 for begge klasser. Standardavvik for klasse A er 1,56 og for klasse B er det 0,77. Svarene viser at det er mye mindre spredning i klasse B, noe som også vises i diagrammet i oppgave a).

Kommentarer

En grafisk framstilling gjør karakterfordelingen oversiktlig, og det er å se tallstørrelser, akseetikketter og så videre. I dette eksemplet har vi brukt Microsoft Excel siden det er enkelt å lage fine stolpediagrammer i programmet. Elevene er imidlertid nødt til å bruke formler for å beregne gjennomsnitt, median og standardavvik. Det er også mulig å bruke andre programmer, for eksempel GeoGebra. GeoGebra har en flott funksjon for å beregne gjennomsnitt, median og standardavvik, men det er mer komplisert å lage fine stoplediagrammer med flere serier i programmet, enn det er i Excel.

	GeoGebra	**Didaktiske refleksjoner**
a)	Stolpediagram	Elevene legger inn tabellen som er oppgitt i oppgaven, merker cellene og velger stolpediagram. Excel lager da et diagram med tre serier, en for hver kolonne. For at diagrammet kun skal inneholde stolper for klasse 2A og 2B, må elevene høyreklikke i diagrammet og velge "Merk data...". Så kan de fjerne "Karakterer" fra listen over serier.
b)	Beregne gjennomsnitt, median og standardavvik	For å beregne disse verdiene, starter elevene med å skrive "=" og de første bokstavene i det de ønsker å beregne, Da kommer de innebygde formlene i Excel opp, og

		de kan dobbeltklikke for å velge riktig formel. Elevene må så velge hvilke celler Excel skal bruke i beregningen.

Maple

Karakterene på listeform

> $K := [1, 2, 3, 4, 5, 6]:$

> $F2AK := [1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6]:$

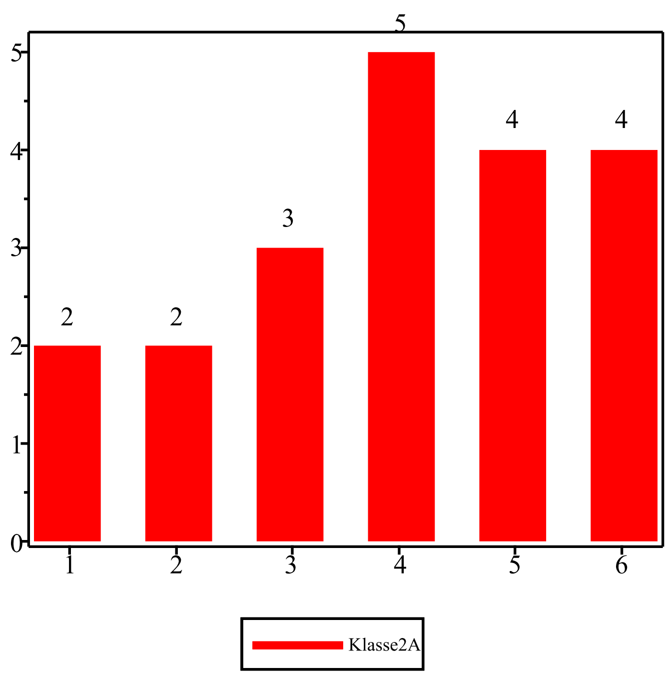
på listeform

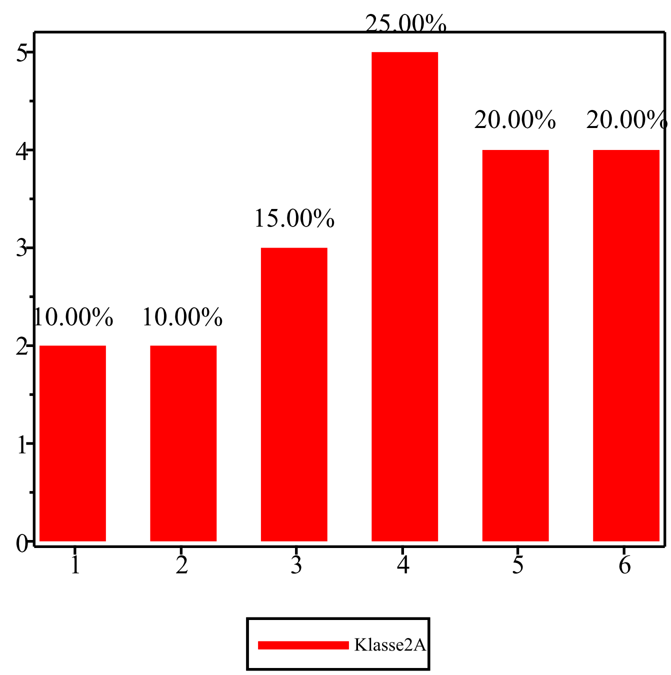
> $F2A := [2, 2, 3, 5, 4, 4]:$
> $F2B := [0, 0, 6, 8, 6, 0]:$

SøyleDiagram plotter søylediagram for dataene i listene *F2A* og *F2B*

> *SøyleDiagram*(*F2A*, *vertikal*, abs, [*Klasse2A*], *color* = *red*, *tickmarks* = [[0.4 = "1", 1.6 = "2", 2.9 = "3", 4.1 = "4", 5.4 = "5", 6.6 = "6"], *default*])

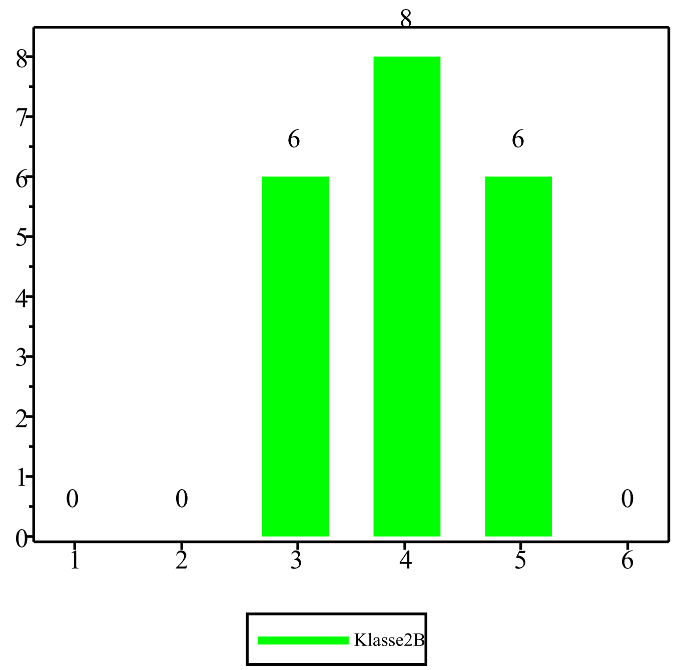
> *SøyleDiagram*(*F2A*, *vertikal*, *rel*, [*Klasse2A*], *color* = *red*, *tickmarks* = [[0.4 = "1", 1.6 = "2", 2.9 = "3", 4.1 = "4", 5.4 = "5", 6.6 = "6"], *default*])

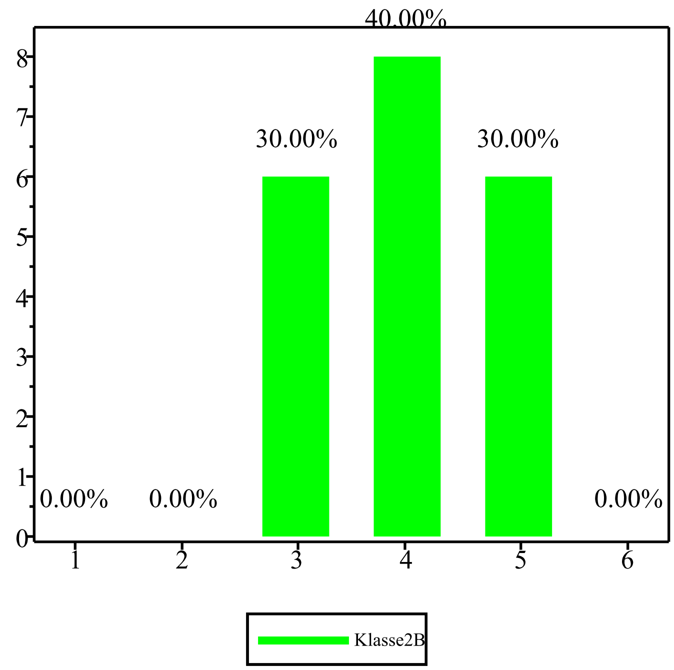




> *SøyleDiagram*(*F2B*, *vertikal*, abs, [*Klasse2B*], *color* = *green*, *tickmarks* = [[0.4 = "1", 1.6 = "2", 2.9 = "3", 4.1 = "4", 5.4 = "5", 6.6 = "6"], *default*])

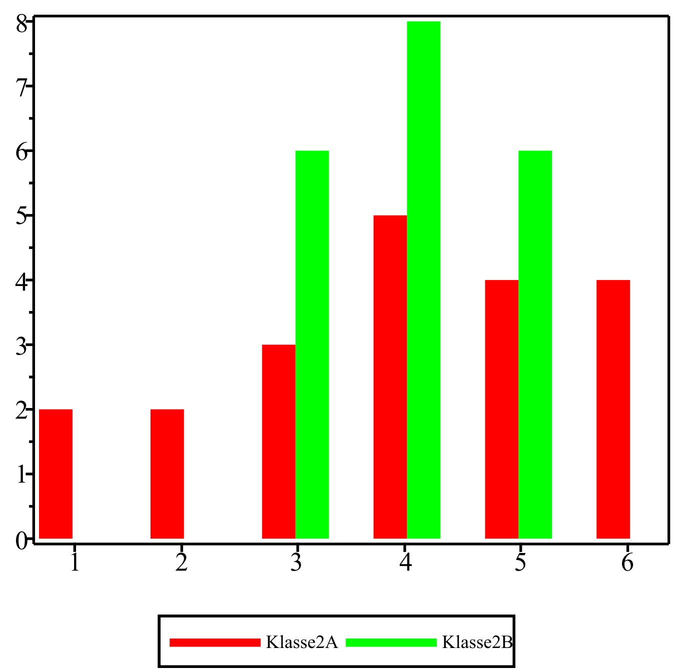
> *SøyleDiagram*(*F2B*, *vertikal*, *rel*, [*Klasse2B*], *color* = *green*, *tickmarks* = [[0.4 = "1", 1.6 = "2", 2.9 = "3", 4.1 = "4", 5.4 = "5", 6.6 = "6"], *default*])

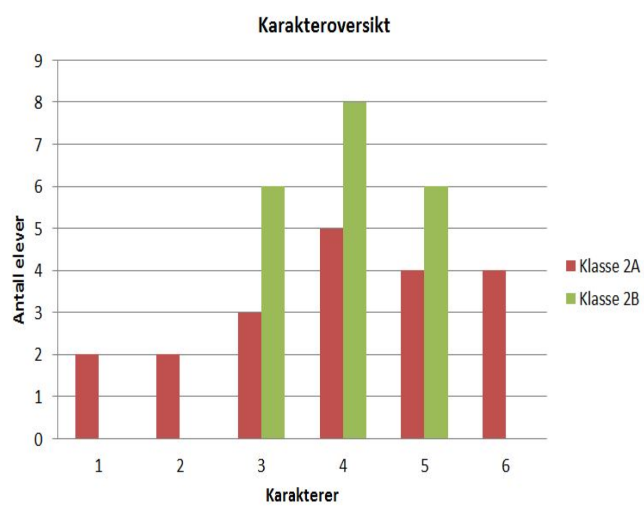





```
> SøyleDiagram([F2A, F2B], vertikal, abs,
    [Klasse2A, Klasse2B], color = red..green,
    tickmarks = [[0.4 = "1", 1.6 = "2", 2.9
    = "3", 4.1 = "4", 5.4 = "5", 6.6 = "6"],
    default])
```

Figuren fra Excel over.





Beregninger av gjennomsnitt, median og standardavvik

$> F2AK := [1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6]:$

$> F2BK := [3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5]:$

Gjennomsnitt	Median	Standardavvik
$> \mu_{'F2A'} = Middelverdi(F2AK)$ $\mu_{F2A} = 3.95000000000000$ $> \mu_{'F2B'} = Middelverdi(F2BK)$ $\mu_{F2B} = 4.$	$> M_{'F2A'} = Median(F2AK)$ $M_{F2A} = 4.$ $> M_{'F2B'} = Median(F2BK)$ $M_{F2B} = 4.$	$> \sigma_{'F2A'} = Standardavvik(F2AK)$ $\sigma_{F2A} = 1.60509058606475$ $> \sigma_{'F2B'} = Standardavvik(F2BK)$ $\sigma_{F2B} = 0.794719414239026$ $>$

Standardavvikene er noe større enn de tilsvarende som regnes ut i GeoGebra. Det skyldes at GeoGebra bruker formelen

$\sigma_{GeoGebra} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (x_k - \mu)^2}{N}}$, mens Maple bruker formelen

$\sigma_{Maple} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (x_k - \mu)^2}{N-1}}$ $(\textit{såkalt empirisk standardavvik})$

Med stor N er forskjellene små.